European Girl's Mathematical Olympiad 2014 ou l'art de méjuger un questionnaire

Pierre-Alain Jacqmin et Michel Sebille

La compétition EGMO (European Girl's Mathematical Olympiad) en est à sa troisième édition. Créée afin d'encourager les jeunes filles à participer aux olympiades et à faire des études de mathématiques, l'EGMO connaît un certain succès. Malheureusement, cette année, les responsables de la sélection des questions ont confondu les questions leur plaisant à eux, mathématiciens accomplis, en ignorant qu'elles devaient convenir à des élèves encore en secondaire. Les médailles de bronze étaient ainsi accordées à partir du score de sept points sur 42.

Des participantes de 28 pays se sont affrontées : Albanie, Arabie Saoudite, Belgique, Biélorussie, Bulgarie, Finlande, France, Hongrie, Indonésie, Iran, Irlande, Italie, Japon, Lettonie, Luxembourg, Mexique, Moldavie, Norvège, Pays-Bas, Pologne, Roumanie, Royaume-Uni, Serbie, Slovénie, Suisse, Turquie, Ukraine, USA. La Belgique était représentée par Pauline Bessemans, Morine Delhelle, France Gheeraert, Manon Mackels (participantes), Michel Sebille (leader) et Pierre-Alain Jacqmin (deputy leader).

La compétition s'est déroulée dans un hôtel de luxe d'Antalya. Les participantes étaient ainsi confrontées au délicat problème du choix entre trois piscines et la plage privée. Le 11 avril, le jury traduisait les questions sans encore se rendre compte qu'il avait été floué. Le 12 et le 13 au matin, les filles affrontaient les questionnaires autant redoutés qu'attendus tandis que le jury coordonnait les corrections futures. L'après-midi et en soirée, les participantes profitaient enfin de l'infrastructure qui leur était proposée. Le 14, pendant que les coordinateurs et les correcteurs se mettaient d'accord, les participantes effectuaient la visite des ruines de Perga, patrie du mathématicien Apollonios. Le 15, après une cérémonie de proclamation imprégnée de grandiloquence, tout le monde partait pour une croisière-repas le long des côtes de la région.

Au niveau du résultat, la Belgique a fini vingt-septième sur vingt-huit. France Gheeraert est 64ème, Pauline Bessemans 93ème, Morine Delhelle et Manon Mackels 104ème. La compétition individuelle a été remportée par l'Ukrainienne Sofiya Dubova (aucune participante ne parvenant à réaliser le maximum sur un tel questionnaire) et celle par équipe par l'Ukraine.

Les questions, une nouvelle fois au nombre de six, étaient les suivantes :

Problème 1 *Déterminer tous les nombres réels t tels que, si a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle, il en va de même pour a^2+bct, b^2+cat, c^2+abt.*

Analysons d'abord le cas des triangles isocèles en choisissant $b=c$. En appliquant l'inégalité triangulaire au deuxième triangle, nous obtenons :

$$a^2+b^2t<2b^2+2abt \qquad \text{et} \qquad 0<a^2+b^2t.$$

Faisons maintenant tendre le triangle vers un triangle plat. Si a tend vers 0, les inégalités nous donnent $0\leqslant t\leqslant 2$. Si a tend vers $2b$, nous obtenons $t\geqslant \frac{2}{3}$. En résumé, $\frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 2$.

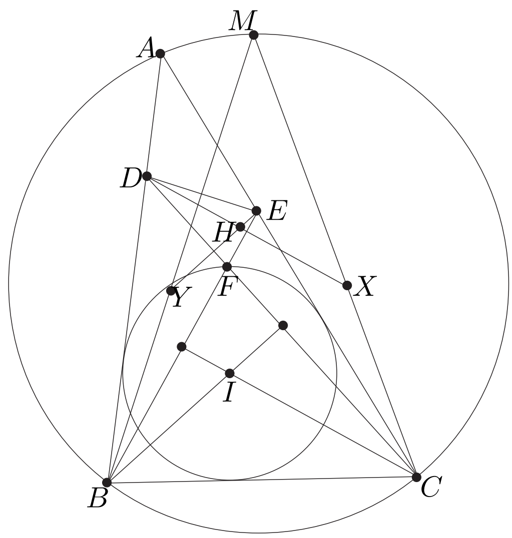
Montrons maintenant que ces valeurs de t conviennent pour tous les triangles. Il est clair que $(b+c)^2\geqslant 4bc$; ainsi

$$\begin{aligned}
& b^2+act+c^2+abt-a^2-bct \\
= {} & (b+c)^2+at(b+c)-(2+t)bc-a^2 \\
\geqslant {} & (b+c)^2+at(b+c)-\tfrac{1}{4}(2+t)(b+c)^2-a^2 \\
\geqslant {} & \tfrac{1}{4}(2-t)(b+c)^2+at(b+c)-a^2 \\
> {} & \tfrac{1}{4}(2-t)a^2+a^2t-a^2 \\
= {} & \tfrac{3}{4}(t-\tfrac{2}{3})a^2 \\
\geqslant {} & 0.
\end{aligned}$$

Losanges • N° 27 • 2014 • 60 – 64

Les deux autres égalités se prouvant par symétrie, on a bien que $\frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 2$.

Problème 2 *Soient D et E des points appartenant respectivement aux intérieurs des côtés $[AB]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC, tels que $DB = BC = CE$. Soient F le point d'intersection des droites CD et BE, I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, H l'orthocentre du triangle DEF et M le milieu de l'arc BAC du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que I, H et M sont alignés.*



Soient α, β et γ les angles en A, B et C. Puisque BCD et CBE sont isocèles respectivement en B et C,

$$|\widehat{CBE}| = |\widehat{CEB}| = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

et

$$|\widehat{BCD}| = |\widehat{BDC}| = 90° - \frac{\beta}{2}$$

Puisque I est le centre du cercle inscrit à ABC, $|\widehat{IBC}| = \frac{\beta}{2}$ et $|\widehat{ICB}| = \frac{\gamma}{2}$. Dans un triangle isocèle, les bissectrices issues des sommets sont aussi les hauteurs issues de ces sommets, ainsi $BI \perp DC$ et $CI \perp EB$. Le point I est donc l'orthocentre de BFC et $|\widehat{FBI}| = |\widehat{FCI}| = \frac{\alpha}{2}$.

Comme on a aussi que $|\widehat{BAI}| = |\widehat{CAI}| = \frac{\alpha}{2}$, les quadrilatères $BIEA$ et $CIDA$ sont cycliques et $|\widehat{IDC}| = |\widehat{IEB}| = \frac{\alpha}{2}$.

La droite DC étant perpendiculaire à EH et BI, celles-ci sont parallèles. Similairement, $DH//CI$. Les angles $\widehat{HEB}$ et $\widehat{EBI}$ sont donc alternes-internes et

$$|\widehat{HEI}| = |\widehat{HEB}| + |\widehat{BEI}| = |\widehat{EBI}| + |\widehat{BEI}| = \alpha.$$

De même, $|\widehat{HDI}| = \alpha$.

Soient $X = DH \cap MC$ et $Y = EH \cap MB$. Puisque DX et IC sont parallèles, la distance qui les sépare vaut $|DI| \sin \alpha$. Par le théorème de l'angle inscrit, $|\widehat{BAC}| = |\widehat{BMC}| = \alpha$. Comme de plus $|MB| = |MC|$, $|\widehat{MBC}| = |\widehat{MCB}| = \frac{\beta+\gamma}{2}$ et $|\widehat{MCI}| = \frac{\beta}{2}$. Dès lors, $|DI| \sin \alpha = |CX| \sin \frac{\beta}{2}$. On a aussi que $|CI| = |DI|$ et donc $|CX| = |CI| \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\beta}{2}}$. Similairement, $|BY| = |BI| \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\gamma}{2}}$.

En appliquant la loi des sinus dans le triangle BIC, $\frac{|BI|}{|CI|} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$. Ainsi, $|CX| = |BY|$ et $XY//BC$. Les triangles BCI et YXH sont donc homothétiques par une homothétie de centre M et les points M, H et I sont alignés.

Problème 3 *Pour un entier strictement positif m, on note $d(m)$ le nombre de diviseurs strictement positifs de m, et $\omega(m)$ le nombre de diviseurs premiers distincts de m. Soit k un entier strictement positif. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs n tels que $\omega(n) = k$ et tels que pour tous les entiers strictement positifs a et b vérifiant $a + b = n$, $d(n)$ ne divise pas $d\left(a^2 + b^2\right)$.*

Nous allons montrer que les nombres $n = 2^{p-1}m$ où m est un naturel avec exactement $k-1$ facteurs premiers distincts, tous strictement plus grand que 3 et p est un nombre premier suffisamment grand (tel que $p > 2$ et $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{(p-1)}{2}} > m$) satisfont les conditions demandées.

Il est clair que $\omega(n) = k$. Prouvons la deuxième condition par l'absurde. Supposons qu'il existe des entiers strictement positifs a et b tels que $a + b = n$ et $d(n)$ divise $d(a^2 + b^2)$.

Puisque p divise $d(n)$, p divise aussi $d(a^2+b^2)$. Nous pouvons donc dire qu'il existe des entiers strictement positifs q, c et r tels que q est premier, r n'est pas divisible par q et $a^2 + b^2 = q^{cp-1}r$.

Si $q \geqslant 5$, il suit que

$$\begin{aligned} 4^{p-1}m^2 &= n^2 \\ &= (a+b)^2 \\ &> a^2 + b^2 \\ &= q^{cp-1}r \\ &\geqslant q^{p-1} \\ &\geqslant 5^{p-1} \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Donc $q = 2$ ou $q = 3$.

Si $q = 3$, $a^2 + b^2$ est divisible par 3 et donc a et b sont aussi divisibles par 3. Donc $n = a + b$ l'est aussi, ce qui est une contradiction. Donc $q = 2$.

Nous savons que $a+b = 2^{p-1}m$ et $a^2+b^2 = 2^{cp-1}r$. Si les plus hautes puissances de 2 qui divisent a et b sont différentes, alors la plus petite est 2^{p-1} car $a+b = 2^{p-1}m$. Dans ce cas, 2^{2p-2} est la plus haute puissance de 2 qui divise $a^2 + b^2 = 2^{cp-1}r$, et donc $2p-2 = cp-1$, ce qui est impossible.

Dès lors, $a = 2^t a_0$ et $b = 2^t b_0$ pour un naturel $t < p-1$ et des impairs a_0 et b_0. Alors, $a_0^2 + b_0^2 = 2^{cp-1-2t}r$ est congru à 2 modulo 4. Donc $cp - 1 - 2t = 1$, ou encore $cp = 2t + 2$. Mais alors $(\frac{c}{2})p = t + 1 < p$ et donc $c = 1$. Ceci implique que $p = 2t + 2$, ce qui est une contradiction puisque p est impair.

Problème 4 *Déterminer tous les entiers $n \geqslant 2$ pour lesquels il existe des entiers $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ vérifiant la condition que si $0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$ et n divise $2i + j$, alors $x_i < x_j$.*

Les naturels n vérifiant cette condition sont ceux de la forme $n = 2^m$ pour un $m > 0$ ou $n = 3 \cdot 2^m$ pour un $m \geqslant 0$.

Pour le prouver, montrons d'abord que n est solution du problème si et seulement si $2n$ l'est. Supposons d'abord que n vérifie la condition grâce aux entiers $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Définissons alors $x_{2i} = y_i$ pour $0 < i < n$ et $x_{2i-1} = \min y_j - 1$ pour $0 < i \leqslant n$. Soient i et j des entiers tels que $0 < i < 2n$, $0 < j < 2n$, $i \neq j$ et $2n$ divise $2i + j$. Dans ce cas, j est pair. Si i est impair, nous savons par définition que $x_i < x_j$. Si par contre i est pair, n divise alors $2\frac{i}{2} + \frac{j}{2}$ et donc $x_i = y_{\frac{i}{2}} < y_{\frac{j}{2}} = x_j$. Dès lors, $2n$ vérifie la condition grâce aux entiers $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$.

Supposons maintenant que $2n$ soit solution grâce aux entiers $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$. En définissant $y_i = x_{2i}$ pour $0 < i < n$, nous remarquons que n est aussi solution.

Ensuite, nous remarquons aisément que 2 et 3 sont solutions. Il suffit en effet de choisir n'importe quelle suite d'entiers, vu qu'il n'y a pas de condition à satisfaire. Par ce que nous venons de prouver, nous pouvons donc dire que 2^m pour tout $m > 0$ et $3 \cdot 2^m$ pour tout $m \geqslant 0$ sont solutions.

Pour montrer que ce sont les seules, il suffit de montrer que si n est impair et $n > 3$, il n'existe pas de tels entiers $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Supposons par l'absurde que ce soit le cas. Remarquons que pour tout $0 < i < \frac{n}{2}$, tel que $i \neq \frac{n}{3}$, $x_i < x_{n-2i}$. De plus, pour tout $\frac{n}{2} < i < n$, tel que $i \neq \frac{2n}{3}$, $x_i < x_{2n-2i}$. Vu que n est impair, il existe pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{\frac{n}{3}, \frac{2n}{3}\}$ un $j \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{\frac{n}{3}, \frac{2n}{3}\}$ tel que $x_i < x_j$. Vu que un de ces x_i doit être le plus petit, ceci est absurde. Remarquons que $n \geqslant 5$ implique que $\{1, \ldots, n-1\} \setminus \{\frac{n}{3}, \frac{2n}{3}\}$ soit non vide. Les solutions sont donc bien celles annoncées.

Problème 5 *Soit n un entier strictement positif. On dispose de n boîtes contenant chacune un nombre positif ou nul de cailloux. Un coup consiste à prendre deux cailloux dans une boîte au choix, supprimer l'un d'entre eux et mettre le deuxième dans une autre boîte au choix. Une configuration initiale de cailloux est dite résoluble s'il est possible d'atteindre à partir de celle-ci une configuration sans aucune boîte vide en un nombre fini (éventuellement nul) de coups. Déterminer toutes les configurations initiales qui ne sont pas résolubles, mais le deviennent si un caillou supplémentaire est ajouté dans une des boîtes, quelle qu'elle soit.*

Une configuration est dite bloquée ssi aucun ensemble de coups ne permet de diminuer le nombre de boîtes vides. Une configuration bloquée sans boîte vide est résoluble en un nombre nul de coup. Regardons maintenant les configurations bloquées ayant au moins une boîte vide. Une boîte ne peut contenir trois cailloux ou plus car prendre deux cailloux dans celle-ci, en jeter un et mettre le deuxième dans une boîte vide diminuerait le nombre de boîtes vides (appelons un tel coup une extension).

Cherchons les situations bloquées solutions du problème. Si une boîte contient un unique caillou, l'ajout d'un caillou supplémentaire dans celle-ci ne débloque pas la situation. On cherche donc des configurations ayant 0 ou 2 cailloux dans chaque boîte. L'ajout d'un caillou dans une boîte vide diminue le nombre de boîtes vides d'une unité et il en est de même si l'ajout se fait dans une boîte non-vide à l'aide d'une extension. Une situation bloquée solution du problème contient donc $n-1$ boîtes de deux cailloux et une unique boîte vide (appelons cette configuration Georgette).

Cette solution nécessitant $2n-2$ cailloux, ce nombre semble critique. Vérifions par récurrence que toute configuration à $2n-1$ cailloux est résoluble. Pour $n=1$, c'est évident. Si aucune boîte n'est vide, pas de problème. Si une boîte est vide, par le principe des tiroirs, une autre boîte en contient 3 et une extension permet de rendre la première non-vide. Dans les $n-1$ autres boîtes, nous avons alors $2n-1$ cailloux et l'hypothèse de récurrence achève l'argument.

Deux configurations sont dites équivalentes s'il est possible de passer de l'une à l'autre par un ensemble de mouvements consistant à prendre deux cailloux dans une boîte et les mettre dans une autre. Une configuration est résoluble ssi une configuration équivalente est résoluble. En effet, lorsqu'on fait un coup, peu importe d'où vient la paire de cailloux. Toute configuration équivalente à Georgette est donc solution du problème ; c'est-à-dire les configurations de $2n-2$ cailloux dont chaque boîte contient un nombre pair de cailloux.

Il reste à montrer qu'il n'y a pas d'autre solution. Si une boîte contient un nombre impair de caillou, la configuration est équivalente à une configuration où cette boîte n'en contient qu'un. Or l'ajout d'un caillou dans cette boîte-là ne modifie en rien le côté résoluble ou non de cette configuration.

Problème 6 *Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant la condition*

$$f\left(y^2+2xf(y)+f(x)^2\right)=(y+f(x))(x+f(y))$$

pour tous les réels x et y.

En remplaçant y par $-f(x)$ dans l'équation, nous savons que f admet une racine. Posons donc $r\in\mathbb{R}$ tel que $f(r)=0$. En substituant y par r, nous obtenons

$$f(r^2+f(x)^2)=(r+f(x))x \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

Supposons que $a,b\in\mathbb{R}$ soient tels que $f(a)=f(b)$. Nous avons dès lors

$$\begin{aligned}(r+f(a))a &= f(r^2+f(a)^2)\\ &= f(r^2+f(b)^2)\\ &= (r+f(b))b\\ &= (r+f(a))b\end{aligned}$$

Donc, dans ce cas, soit $a=b$, soit $f(a)=-r$. Appelons cette propriété la quasi-injectivité de f.

Prouvons maintenant que f admet une unique racine. Supposons au contraire que $r'\neq r$ soit tel que $f(r')=0$. Dès lors, $f(r)=0=f(r')$. Par quasi-injectivité de f, $f(r')=-r$. Par symétrie, nous obtenons aussi $f(r)=-r'$. Mais alors $-r=f(r')=0=f(r)=-r'$, ce qui est absurde. f admet donc une unique racine.

En remplaçant x par r et y par 0 dans l'équation, nous obtenons $f(2rf(0))=0$. Puisque la racine de f est unique, nous en déduisons que $2rf(0)=r$. Donc soit $r=0$, soit $f(0)=\frac{1}{2}$. Traitons ces cas séparément.

<u>*Cas 1 : $r=0$.*</u>

Puisque $r=0$, la quasi-injectivité de f implique son injectivité. Maintenant, en substituant x par 0 dans l'équation de départ, nous obtenons $f(y^2)=yf(y)$ pour tout $y\in\mathbb{R}$. Par ailleurs, en remplaçant y par 0 dans cette même équation de base, nous savons que $f(f(x)^2)=xf(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Dès lors, $f(x^2)=xf(x)=f(f(x)^2)$ et $x^2=f(x)^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ par injectivité de f. Donc, pour chaque x, soit $f(x)=x$, soit $f(x)=-x$.

Supposons maintenant qu'il existe $k,l\neq 0$ tels que $f(k)=k$ et $f(l)=-l$. Remplaçons x par k et y par l dans l'équation de départ. Nous en déduisons

$$f(l^2-2lk+k^2)=(k+l)(k-l).$$

Donc, soit $(l-k)^2=(k+l)(k-l)$, soit $-(l-k)^2=(k+l)(k-l)$. Le premier cas implique que $k-l=k+l$ et donc que $l=0$, ce qui est absurde. Le deuxième cas implique que $l-k=k+l$, ou encore $k=0$, ce qui est aussi absurde.

Les seules solutions pour le cas 1 sont donc $f(x)=x$ et $f(x)=-x$. On peut vérifier facilement que ces fonctions satisfont l'équation.

<u>*Cas 2 : $f(0)=\frac{1}{2}$.*</u>

En remplaçant x par 0 et y par r dans l'équation, nous obtenons

$$f\left(r^2+\frac{1}{4}\right)=0.$$

Dès lors $r^2+\frac{1}{4}=r$ et donc $r=\frac{1}{2}$.

Prouvons par l'absurde que f est injective. Par sa quasi-injectivité, il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a\neq b$ et $f(a)=f(b)=-\frac{1}{2}$. En substituant x par $r=\frac{1}{2}$ et y par a dans l'équation de départ, nous pouvons dire que $f(a^2-\frac{1}{2})=0$. Nous en déduisons que $a^2=1$ et, par symétrie, $b^2=1$. Maintenant, en prenant $x=0$

et $y = a$ et b successivement, nous savons que

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{-1}{2} = f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(b+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{-1}{2}.$$

Par conséquent, $a = b$ et f est injective.

En posant $y = 0$ dans l'équation, nous obtenons

$$f(x+f(x)^2) = f(x)\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Par contre, en remplaçant x par 0, nous en déduisons que

$$f\left(y^2+\frac{1}{4}\right) = \left(y+\frac{1}{2}\right)f(y).$$

Par injectivité de f, nous savons donc que $x^2+\frac{1}{4} = x+f(x)^2$. Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = x-\frac{1}{2}$, soit $f(x) = \frac{1}{2}-x$.

Supposons finalement que $k \in \mathbb{R}$ soit tel que $f(k) = k-\frac{1}{2}$. En substituant x et y par k dans l'équation, nous obtenons

$$f\left(4k^2-2k+\frac{1}{4}\right) = 4k^2-2k+\frac{1}{4}.$$

Dès lors,

$$\frac{1}{2}-(4k^2-2k+\frac{1}{4}) = 4k^2-2k+\frac{1}{4},$$

ce qui implique $k = 0$ ou $k = \frac{1}{2}$. Le premier cas étant impossible puisque $f(0) = \frac{1}{2}$, nous en déduisons que $f(x) = \frac{1}{2}-x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque cette fonction satisfait l'équation, elle est donc la seule solution du cas 2.

Les solutions du problème sont donc les trois fonctions d'équation $f(x) = x$, $f(x) = -x$ et $f(x) = \frac{1}{2}-x$.